SAGGIO

DI UNA NUOVA

TEORICA ELEMENTARE

DELLE

RETTE PARALELLE

Di Giuseppe Folliero.



NAPOLI

DALLA STAMPERIA E CARTIERA DEL FIBRENO

Largo S. Domenico Maggiore N.° 3.

1832.

PREFAZIONE

Ha ben ragione il Montucla nella sua celebratissima storia delle Matematiche, allorchè, parlando degli elementi piani d'Euclide, e segnatamente del suo tanto noto postulato, sul quale fonda la Teorica delle paralelle, dice: « Il faut convenir, que dans l'endroit où le postulatum d'Euclide est communément placé, savoir à la suite des définitions et axiômes préliminaires, il n'est ni clair, ni intelligible. » Ma non sembra egualmente commendevole la conchiusione del suo discorso: « Mais placé après la proposition XXVI, où l'on démontre, que si les angles internes sont ensemble égaux à deux droits, les lignes ne sauraient concourir, ce postulatum me semble presque aussi évident, qu'un axiôme. » Imperocchè quel postulato, in qualunque luogo si collochi, non sarà mai meno incerto di prima, e poggerà sempre sovra proprietà supposte: cosicchè nel cambiamento da lui

consigliato, dovrebbe naturalmente esser conseguenza della proposizione inversa alla vigesima sesta, cioè: *Allorchè due rette non s'incontrano, se ambe sono intersecate da una terza, gli angoli interni, che formano, valgono insieme due retti:* la quale non è stata finora dimostrata.

E ben si conobbe, non potersi ammettere come assioma quel postulato da quanti illustri matematici fiorirono prima e dopo del Montucla. Però si diedero a migliorar ventura un Tolomeo, un Proclo, un Gemino, un Nassir-Eddin, un Clavio; non che Wallis, Bertrand, Simson, Tartaglia, Castiglione, Saccheri, Laplace, Dalambert ed altri, e più pel corto il Legendre. Ma sventuratamente nissuno tra loro raggiunse il desiderato scopo co' soli mezzi elementari: chè quegli, che vi pervenne, ebbe ad innoltrarsi nelle misteriose vie dell'*infinito.* La dimostrazione adunque di questo postulato, co' singolari mezzi del *finito,* si rimase indi un arduo subietto speculativo: ancora per l' ostacolo che vi frappone la proprietà degli asintoti (*).

(*) Gli asintoti sono certe rette che si approssimano sempre a certe date curve senza mai poterle incontrare. Sia fatta questa av-

Il Saggio, che or da me si presenta, emerge da concepimenti finora non azzardati: dee ben dirsi un tentativo, ma un tentativo del tutto nuovo. Io dimostro sulle prime, essere la somma de' due angoli di un triangolo minore di due angoli retti, indi passo alla dimostrazione del famoso postulato Euclideo; cioè *allorchè due rette sono tali che, incontrate da una terza, facciano con essa due angoli interni, valenti insieme meno di due retti, esse dovranno incontrarsi da quel lato*, e lo divido in tre casi. Nel primo suppongo che uno degli angoli interni sia acuto, e l'altro retto: nel secondo, che ambo gli angoli sieno acuti: e nel terzo l'uno acuto e l'altro ottuso. Per dimostrare il primo caso, dal quale fo dipendere gli altri due, suppongo, che non abbia luogo la proprietà ivi enunciata, cioè che *la perpendicolare e l' obliqua ad una stessa retta s' incontrino* (tali nomi prendono allora le due rette in quistione), e stabilisco in forza dell' ipotesi un teorema; cioè che *allorquando due rette sono ambe perpendicolari ad una*

vertenza solo per coloro che non fossero abbastanza inoltrati nella conoscenza delle cose matematiche.

terza, esse saranno dapertutto equidistanti: teorema, che riconosciuto d'altronde vero con mezzi non elementari (*), dà motivo ad arguire per l'appunto, che l'obliqua e la perpendicolare convengono, e distrugge in tal guisa l'ipotesi fatta, che non ammetteva tale incontro. E dando poscia dello stesso primo caso una dimostrazione assai breve, e all'intutto diversa dalla precedente, deduco da esso i due secondi: così dimostro in generale quel postulato, e gradatamente sviluppo in seguito i teoremi costituenti l'intera teorica delle rette paralelle, uno de' quali, enunciato nel qui espresso modo, cioè *allorchè due rette sono paralelle, esse saranno dapertutto equidistanti*, suona lo stesso che quello, *due rette, entrambe perpendicolari ad una terza, sono dapertutto equidistanti*, mi ha servito sulle prime a dimostrare il noto postulato.

A vie meglio convalidare l'edifizio geometrico così costruito, credo essenzial cosa rispondere a due osservazioni, che dubito non mi sieno fatte, pel carattere d'importanza e di validità con cui mi si mostrano a prima vista.

(*) Introducendo l' idea dell' infinito nella teorica delle paralelle, vi si dimostrerebbe questa proprietà.

I.° Potrebbe giudicare alcuno, ch'io non mi sia strettamente attenuto alle forme regolari, dappoichè le mie dimostrazioni sono per la maggior parte indirette.

Rispondo.—Per quali motivi si vuole, che nelle scienze matematiche meglio sieno adoperate le dirette, che le dimostrazioni indirette de'teoremi? Avvene, a me sembra, un solo; cioè, che nel caso di dimostrazioni indirette, non si scorge perfettamente con quali mezzi, con quai ragionamenti e quali lontane vedute abbiansi potuto congetturare alcune proprietà, che dimostrate poscia matematicamente con uno sforzo d'ingegno, siensi per tal guisa introdotte nel vasto cerchio delle verità. Questa è l'unica taccia, che apporre si possa a tale specie di raziocinii, e non mai quella della inesattezza e della insufficienza, come taluni pretendono: la quale a parer mio tanto le disconviene, quanto non converrà giammai all'altra specie di ragionamento, che per dirette vie ci conduce alla scoperta dell'ignoto; dappoichè l'una e l'altra egualmente ci sforzano a chinar la fronte innanzi a conseguenze giuste ed irrefragabili. Nei casi dunque, in cui le vie indirette offrono all'occhio inesperto congetture singolari nella materia che percorre, esse, negar nol deggio,

hanno qualche cosa di *men soddisfacente* (è questa la espressione convenevole) di quelle, che niuna congettura premettono.

Ma, chi consideri bene, e' si vedrà che non è questo il caso mio. Le proprietà, che dimostro con mezzi indiretti, sono sì chiare e patenti, che si appalesano da loro stesse. E però il congetturarle non è stato un dono fatto esclusivamente dal Cielo al primo, che di tale materia occupossi, nè tampoco a me, che dopo tanti altri oso ambire la stessa palma : poichè, è bene il ripeterlo, esse appariscono a tutti, ed ognuno nel vederle dimostrate, se mai lo fossero, anzichè rammaricarsi di non averle già colte tra la serie de' suoi pensieri, acquista con soddisfazione la certezza di quanto aveva immaginato.

In pari guisa Archimede, speculando sull'analogia, trovò facilmente la misura del cerchio e della circonferenza : così pure Newton ed altri molti fecero insigni e grandiose scoperte : così forse alla vasta scienza de' calcoli campi di nuove conoscenze e di gloria son riserbati.

II.ª Altri forse potrebbe oppormi il seguente ragionamento : *Dappoichè nel principio del vostro secondo lemma, negando che l'obliqua e*

la perpendicolare ad una stessa retta s' incontrino, ne deducete senza alcun assurdo intermedio, che due rette perpendicolari ad una medesima sono dappertutto equidistanti, ho il diritto di sostenere, non ostante ch'io non iscorga nè paralogismi nè errori nella vostra dimostrazione, che avete dovuto ingannarvi, poichè dice la Logica: Da una ipotesi falsa non può dedursi una conseguenza vera; *e nel vostro caso, non ostante che per vera sia stata sempre riconosciuta la conseguenza e per falsa la ipotesi, voi da questa per l'appunto deducete quella.*

Si ha ben diritto di dire, rispondo, che da una ipotesi falsa non può dedursi una conseguenza vera; ma ciò vale ogni qualvolta la conseguenza, riconosciuta vera, non possa dedursi dal concorso di altre verità, o per meglio dire allorquando unicamente dall' assurdo dipenda. Or non è questo il caso mio: si vede anzi, che con la verità, opposta per l' appunto a quel dato assurdo, di bel nuovo si dimostra l' equidistanza di due rette perpendicolari ad una terza. Se questo è vero, reggerà dunque sì fatta osservazione?

Non ostante ciò, desideroso di evitarla all' intutto, son riuscito a dare eziandio un' al-

tra dimostrazione dello stesso teorema, la quale non va soggetta al sovra esposto ragionamento.

Ma forse qui ben a ragione mi si griderà: Qual acume d' ingegno, qual dottrina è la tua, giovine d' anni e di mente, per cui sì audacemente ti spingesti ad una meta fin'or non toccata?

Dotto ed indulgente lettore, condona a nobile desiderio d' onore il temerario ardir giovanile. E se mai benigna sorte volesse, ch' io sia giunto a conseguire il sospirato scopo, farò osservare, che le nuove ed illustri scoperte non sempre derivano da sublimità d'intelletto, ma bene spesso il giuoco felice degli organi interni, o le combinazioni del pensiero nel campo indefinito delle umane idee, ci spianano improvvisamente la strada della verità e della gloria.

Nel caso opposto, mi sarà egualmente grata la decisione negativa del mondo matematico, poichè il mio tentativo varrà se non altro di sprone a percorrer sentieri non ancora battuti, per superare uno scoglio, che sì grave onta arreca alla Geometria.

LEMMI PRELIMINARI

LEMMA PRIMO.

In un triangolo qualunque la somma di due angoli è sempre minore di due retti.

Se nel triangolo *ABC* (*Fig. 1.*), per esempio, la somma degli angoli *B* e *C* valesse due retti, l'angolo *EBC* sarebbe eguale all' angolo *BCA*, e l' angolo *FCB* all'angolo *ABC*; e se si sovrapponessero questi angoli rispettivamente eguali, facendo cadere *CB* sovra *BC*, *CA* combacerebbe con *BE* e *BA* con *CF*: ma *BA* incontra *CA*, dunque anche *BE* incontrerebbe *CF*, e due rette *AB*, *AC* avrebbero due punti comuni, l'uno in *A* e l'altro in *D*. Assurdo.

Se poi la somma di questi due angoli fosse maggiore di due retti, facendo nell'uno, per esempio in *ABC*, un angolo *ABC* tale che aggiuntovi l'angolo *ACB* faccia con esso due retti, avrebbonsi nel triangolo *BAC* due angoli, l' uno in *B*, l'altro in *C*, eguali insieme a due retti, e si ricaderebbe nel precedente caso.

Dunque in un triangolo qualunque la somma di due angoli è sempre minore di due angoli retti.

LEMMA II.

Per l' opposto, se due rette sono tali che intersecate da una terza facciano con essa da uno stesso lato due angoli interni, la di cui somma sia minore di due retti, esse s' incontreranno necessariamente da quel lato.

Per dimostrare questa verità premetto il caso, che le rette *AB*, *CD* (*Fig.* 2.), per esempio, intersecate da una terza *AC* facciano con essa, l' una l' angolo acuto *BAC*, l' altra l' angolo retto *ACD*; e dimostro che tali rette dovranno incontrarsi dal lato ove formano questi angoli, supponendo per l'appunto che il loro incontro non abbia luogo.

Siano perciò due rette *AB*, *CD* (*Fig.* 3.) entrambe perpendicolari ad una terza *AC*; dico che, data per vera la ipotesi premessa, se si abbasserà da un punto di *AB*, o di *CD*, sia per esempio dal punto *E* della retta *CD*, una perpendicolare *EF* sulla *AB*, *EF* uguaglierà *AC*.

In fatti, se ciò non fosse, supponiamo *FG* minore di *FE*, ed eguale ad *AC*. Dal punto di mezzo *H* di *AF* innalzo una perpendicolare *HI* sopra di essa, la quale incontrerà sempre la *CE* in *I*; congiungo il punto *I* col punto *G* e prolungo la *IG* in *G'*. L' evidente eguaglianza de' due quadrilateri *ACIH*, *FGIH*, i quali combaciano perfettamente allorchè *HI* è comune e l' angolo *IHF* cade sull' angolo *IHA*, c' insegnerà che l' angolo *IGF* eguale allora all' angolo *ICA* sarà retto, e che tale ancora sarà l' adiacente *FGG'* di *IGF*. La

retta GG' non potendo dunque incontrare la FB (*), se si prende sopra di essa un punto F' qualunque, dal quale le s' innalzi una perpendicolare $F'H'$, secondo la supposizione fatta questa perpendicolare avrà ogni suo punto H' compreso nell' angolo $G'ID$ (l'angolo I del triangolo rettangolo IGE essendo (*Lemma I*) acuto): tagliando poscia $F'G' = FG$, ed innalzando in G' una seconda perpendicolare $G'I'$ sulla medesima $F'G'$, avverrà lo stesso per ogni punto I' della $G'I'$; e se si prendono sulle mentovate perpendicolari due distanze $F'H'$, $G'I'$ eguali rispettivamente ad FH ed a GI, e si congiunga il punto H' col punto I'; il quadrilatero $HIGF$ eguale al quadrilatero $H'I'G'F'$ sarà minore dell' area $G'GED$. Dunque $HIGF + BFGG' < G'GED + BFGG'$, minore dunque di $BFED$; dunque $BFGG' < BFED$. Or la superficie $BFGG'$, giacchè FG uguaglia AC, e l' angolo in F è retto come l' angolo in A, e quello in G come quello in C, potendo combaciare colla superficie $BACD$, le sarà uguale: surrogando questa avremo dunque $BACD < BFED$, ossia il tutto minor della parte, che è assurdo.

(*) Il mio scopo, provando che la GG' non incontra la FB, è di dimostrare che la superficie $BFGG'$ è minore della superficie $BFED$, verità che si affaccerebbe subito alla mente se si ammettesse l'idea dell'infinito, l'una superficie essendo allora evidentemente parte e l'altra tutto. È da osservare che il ripiego preso da me per dimostrare altrimenti questa verità, sbandisce totalmente quella idea: il qual ripiego forse potrebbe non essere del tutto infecondo di utili conseguenze in fatto di Geometria. La stessa considerazione varrebbe nella seconda parte di questo lemma.

Se per l'opposto AC fosse maggiore di FE prendendo $FK = AC$ sulla FE prolungata, congiungendo il punto I col punto K, e prolungando la IK in F'', proverebbesi come precedentemente che i quadrilateri $ACIH$, $FKIH$ sono eguali; che di più, l'angolo EIK essendo acuto, le due perpendicolari $A''C''$, $F''E''$, la cui distanza è $A''F''=AF$, non incontrano la IED; e costrutto allora il quadrilatero $A''F''E''C''=$ al quadrilatero $AFEC$, essendo esso contenuto nella superficie $DEKF''$, ne sarà minore: aggiungendo per conseguenza alla stessa superficie $BFED$, dall'una parte il quadrilatero $ACEF=$ ad $A''C''E''F''$, dall'altra la superficie $DEKF''$, avrassi $ACEF + BFED$, ossia $BACD < DEKF'' + BFED$, ossia $BACD < BFKF''$. Or FK uguagliando AC, e l'angolo in F essendo retto come quello in A, e quello in K come quello in C, queste stesse superficie poichè atte a combaciar perfettamente sarebbero eguali. Dunque è assurdo puranche il supporre $FE < AC$.

Conchiudiamo dunque che la EF non potendo essere nè maggiore nè minore della AC, le sarà ugual

Essendo ciò dimostrato, e supposto che le due rette AB, CD (*Fig.* 2) non debbonsi mai incontrare, se s'innalzi da A sopra di AC la perpendicolare AE, sulla quale al punto E si conduca la seconda perpendicolare EF, e su di questa ultima si determini una distanza $EF = AC$, per il precedente teorema la CD passerà per il punto F: ma allora la EF dovrà inevitabilmente intersecare la AB in G, il che ripugna all' ipotesi fatta, giacchè l'angolo BAE è acuto come complemento dell'angolo BAC, e l'angolo AEG è retto.

È perciò assurdo il supporre, come noi abbiam fatto, che le due rette *AB*, *CD* non s'incontrino, poichè in virtù della medesima contraria ipotesi giungiamo a dimostrare la necessità di tale incontro.

Ma prima di procedere oltre, mi fermerò qui un istante a dare un' altra dimostrazione della stessa proprietà dell' obliqua e della perpendicolare.

Sia *AB* (*Fig. 4*) una perpendicolare alla retta *AC*, e *CD* una terza retta che faccia con la *AC* l' angolo acuto *ACD*, dico secondo l' enunciato del lemma che la *CD* incontrerà la *AB*.

Imperciocchè se ciò non avviene per queste due rette prese ad arbitrio, non avverrà per verun' altra coppia di esse.

Or se da un punto *E* qualunque della *AB* abbasso sulla *CD* una perpendicolare, questa non potendo fare con la *AE* l'angolo rientrante *AEF*, nè tampoco essere sul suo prolungamento, poichè in amendue i casi la *AEB* dovrebbe incontrare la *CD*, che è contro la ipotesi, farà con essa l' angolo saliente *DEA*, il quale potrà essere acuto, retto od ottuso; ma in qualsivoglia di questi tre casi, potrò sempre tirare in esso una retta qualunque *EG*, che faccia con la *ED* l' angolo acuto *DEG*, linea che non ostante l' ipotesi fatta incontrerà la *CD* in *G*; giacchè dovendo essa uscire dalla figura *ACDE*, non è possibile che incontri di nuovo la *AE* e la *ED*, nè tampoco la *CA*, qualunque sia l' angolo restante *AEG*; se ottuso o retto per il lemma I, se acuto per l' ipotesi fatta.

Sieno adesso le due rette proposte AB, CD (Fig. 5) tali, che incontrate da una terza AC, formino con

essa da uno stesso lato i due angoli acuti A e C; queste rette dovranno incontrarsi da quel lato.

Imperocchè se al punto *A*, per esempio, di *AC* innalzo su questa retta la perpendicolare *AE*, essa sarà fuori dell' area *BACD*; e la retta *CD*, secondo quel che si è detto precedentemente, dovendola incontrare in *E* incontrerà pure la *AB* in *F*.

Se per ultimo caso, le rette proposte AB, CD, (*Fig.* 6) *fossero tali, che intersecate da una terza AC facessero con essa due angoli, l'uno in A acuto, l'altro in C ottuso, la di cui somma fosse sempre minore di due retti, per dimostrare che s' incontrano* condurremo dal punto *A* una retta *AE* tale, che la somma de' due angoli *EAC*, *DCA* sia eguale a due retti; e dal punto *F* di mezzo di *AC* abbasseremo sulle due rette *AE*, *CD* due perpendicolari *FG*, *FH*, la prima delle quali incontrerà necessariamente la *AB* in *I*. L' eguaglianza de' due triangoli rettangoli risultanti *AFG*, *CFH*, ci dimostrerà che la linea *GFH* è retta: ma l' angolo in *H* è retto per costruzione, e l'angolo *HID* è acuto perchè eguale all' angolo acuto *GIA* del triangolo rettangolo *AGI*; dunque le rette *AID*, *HCD*, secondo ciò che si è detto nel primo caso, si dovranno incontrare; e però si dee dire in generale, che se per l' opposto due rette sono tali che intersecate da una terza facciano con essa da uno stesso lato due angoli interni, la di cui somma è minore di due retti, tali rette s' incontreranno necessariamente da quel lato.

TEORICA DELLE PARALELLE.

DEFINIZIONE.

Due rette sono dette paralelle allorchè situate in uno stesso piano, e comunque prolungate, non s' incontrano mai.

TEOREMA I.

Se due rette AB, CD (Fig. 7) *sono paralelle, intersecate in un modo qualunque da una terza AC, dico che la somma de' due angoli interni BAC, ACD sarà eguale a due retti.*

Perchè se ne fosse minore s'incontrerebbero in O, e se maggiore in O', come rilevasi per gli antecedenti lemmi; il che in ambi i casi ripugna all'ipotesi.

COROLLARIO I.

Se due rette sono paralelle, gli angoli alterni interni ed alterni esterni saranno rispettivamente eguali.

COROLLARIO II.

Se due rette AB, CD sono paralelle (Fig. 8), *ogni perpendicolare AC abbassata dal punto A di AB, per esempio sopra CD, sarà perpendicolare ancora ad AB.*

Poichè se l'angolo BAC fosse acuto, esse s'incontrerebbero in O, e se ottuso in O'; ciò che ripugna all'ipotesi.

COROLLARIO III.

Se due rette AB, CD sono paralelle, saranno dapertutto equidistanti; cioè una qualunque perpendicolare AC comune ad amendue, ne eguaglierà sempre un' altra qualunque EF.

Giacchè, se dal punto di mezzo G di AE conduco la comune perpendicolare GH alle due paralelle, i due quadrilateri $ACHG$, $EFHG$ eguali, daranno pure l'eguaglianza de' lati omologhi AC, EF ad essi appartenenti.

TEOREMA II.

Reciprocamente se due rette AB, CD (Fig. 7) *sono tali, che intersecate da una terza AC formino con essa due angoli interni BAC, ACD, la di cui somma eguagli due retti, esse saranno paralelle.*

Se tali non fossero, incontrandosi in O, nel triangolo OCA la somma de' due angoli C ed A sarebbe uguale a due retti.

COROLLARIO I.

Dunque, allorchè gli angoli alterni interni ed al-

terni esterni sono uguali, le rette che li formano saranno paralelle.

COROLLARIO II.

Se due rette AB, CD (Fig. 8) *sono entrambe perpendicolari ad una terza AC, esse saranno paralelle.*

Perchè allora la somma degli angoli interni, che formano con questa terza, sarà eguale evidentemente a due retti (*).

COROLLARIO III.

Se due rette AB, CD (Fig. 8) *sono dapertutto equidistanti, cioè tali che due perpendicolari AC, EF abbassate dai punti A ed E della AB, per esempio, sulla retta CD, sieno eguali, dico ch' esse saranno paralelle.*

Poichè se dal punto di mezzo H di CF innalzo una perpendicolare HG su questa retta, l' eguaglianza de' due quadrilateri $ACHG$, $EFHG$ dimostrerà quella de' due angoli in G ad essi appartenenti, e ciascheduno es-

(*) Avendo poc'anzi definito le rette paralelle, ho creduto per esattezza dover riprodurre in altri termini questo teorema già dimostrato senza il soccorso della teorica delle paralelle; teorema che enunciato nel seguente modo, cioè *allorchè due rette sono entrambe perpendicolari ad una terza, esse non potranno incontrarsi*, ci ha già servito a dimostrare il lemma II.

sendo allora retto, le AB e CD entrambe perpendicolari alla stessa HG saranno paralelle.

TEOREMA III.

Due rette AB, CD (Fig. 9.) *paralelle amendue alla stessa EF, saranno paralelle tra loro.*

Conducendo la secante GHI, si avrà $AGH + EIH = 2R$ (*), e $CHI + EIH = 2R$; e però $AGH = CHI$ e $AGH + CHG = 2R$. Le due rette AB, CD saranno dunque paralelle.

COROLLARIO.

Per conseguenza, da uno stesso punto A (Fig. 10) *non si possono condurre due o più paralelle AB, AC etc. ad una stessa retta DE.*

(*) L'espressione $2R$ equivale a *due retti*.

ALTRA MANIERA

DI DIMOSTRARE L' EQUIDISTANZA DI DUE RETTE PERPENDICOLARI AD UNA TERZA, E NUOVA CONSEGUENZA CHE SE NE RITRAE.



LEMMA I.

In un triangolo qualunque la somma di due angoli è sempre minore di due retti. Ciò è stato innanzi dimostrato (*pag. 11*).

LEMMA II.

Sia dato l'angolo acuto BAD (Fig.11), *se da due punti, B e C di AB per esempio, si abbassino due perpendicolari BD, CE sopra di AD, la perpendicolare BD che si allontana più della perpendicolare CE dal vertice A, sarà maggiore di essa CE.*

Poichè se ne fosse minore, prendendo $DG = CE$, $DF = AE$, e congiungendo il punto G col punto F, i due triangoli ACE, FDG essendo eguali, l' angolo CAE dell' uno uguaglierebbe l' angolo GFD dell' altro, e nel triangolo HAF la somma de' due angoli in A ed F sarebbe eguale a due retti.

Se quindi DB fosse eguale a CE, si dedurrebbe con lo stesso ragionamento, che nel triangolo ABF la som-

ma de' due angoli in *A* ed *F* uguaglierebbe due retti. Dunque *BD* sarà maggiore di *CE*.

LEMMA III.

Dato l'angolo acuto BAC, se da un punto D di uno de' suoi lati, AB per esempio, si abbassi sull'altro lato la perpendicolare DE, la superficie BDEC, così determinata, sarà maggiore di qualunque figura data abcdefg.

Imperocchè, se da un secondo punto *F*, preso sullo stesso lato *AB*, ma più lontano dal vertice *A* del punto *D*, abbasso una seconda perpendicolare *FG* sulla stessa *AC*; che indi prenda le distanze *GH*, *HK*, *KM* etc. tutte eguali tra loro e ad *EG*, e che innalzi ai punti *H*, *K*, *M* etc. delle perpendicolari *HI*, *KL*, *MN* etc., determinando sopra di queste le distanze *HI*, *KL*, *MN* etc. eguali tra loro ed a *GF*; i punti *I*, *L*, *N* etc. saranno in qualunque modo dentro la superficie *BFGC*, incontrino o no le succennate perpendicolari la *FB*: poichè se l'incontrano, ciascheduna sarà (*Lemma I*) maggiore di *FG*; e se no, resteranno totalmente comprese nella superficie *BFGC*.

Se dunque determino sopra ciascheduna di esse le nuove distanze *HP*, *KQ* etc., eguali tutte a *GO*, eguali ad *ED*, e che congiunga i punti *O*, *I*; *P*, *L*; *Q*, *N* etc., formerò un numero indeterminato di quadrilateri *OGHI*, *PHKL*, *QKMN* etc., tutti eguali tra loro ed a *DEGF*. Or la somma di questi quadrilateri, rappresentando in superficie una figura qualun-

que, è d'altronde evidentemente minore della superficie *BDEC*; dunque infine la figura *abcdef* è minore della superficie *BDEC*.

TEOREMA.

Sieno le due rette AB, CD amendue perpendicolari alla stessa retta AC; dico che tali rette saranno dapertutto equidistanti, cioè che la perpendicolare EF abbassata da un punto E della retta CD, per esempio sulla AB, sarà uguale alla comune perpendicolare AC.

Imperocchè, supponendo la *EF* maggiore della *AC*, se si prende sopra di essa, a partire dal punto *F*, una distanza *FG* eguale ad *AC*, e che dal punto medio *H* di *AF* s'innalzi sopra questa retta la perpendicolare *HI*, che incontra la *CE* in *I*; congiungendo il punto *I* col punto *G*, e prolungando la *IG* in *K*, si formerebbe una superficie *BFGK* eguale alla *BACD*, l'angolo in *F* essendo retto come quello in *A* per ipotesi, la retta *FG* essendo eguale alla *AC* per costruzione, e l'angolo *FGK* essendo retto poichè adiacente all'angolo *IGF*, che nel paragone de' quadrilateri eguali *ACIH*, *FGIH*, si trova eguale all'angolo retto *ACI* del primo.

Se dunque alla stessa superficie *BFGK*, da una parte si aggiunge la figura *HIGF*, e dall'altra la superficie *KGED*, si avrà $BFED > BHIK$ pel lemma III (l'angolo *GIE* nel triangolo rettangolo *IGE* essendo

acuto), maggiore per conseguenza di *BFGK*; maggiore dunque di *BACD*, il che è assurdo.

Se quindi la *EF* fosse minore della *AC*, prendendo sopra di essa ed il suo prolungamento una distanza *FG'* uguale ad *AC*, congiungendo il punto *I* col punto *G'*, e prolungando la *IG'* in *K'*; la novella eguaglianza de' quadrilateri *ACIH*, *FG'IH* dimostrerebbe quella delle due superficie *BACD*, *BFG'K'*; e togliendo ad ambe la parte comune *BFED*, si dedurrebbe l' eguaglianza assurda (*Lemma III*) della figura *ACEF* colla superficie *DEG'K'*.

Dunque infine la *EF* eguagliando la *AC*, le rette *AB*, *CD* saranno dapertutto equidistanti.

Ed allora i due quadrilateri *ACIH*, *FEIH* saranno eguali, e l' angolo in *E* sarà retto.

COROLLARIO I.

In un triangolo rettangolo la somma dei tre angoli uguaglia due retti.

Poichè se si congiunge *CF*, i due triangoli rettangoli *ACF*, *EFC* eguali, daranno $ACF + AFC = EFC + ECF = R$; giacchè $ACF + AFC + EFC + ECF = 2R$.

COROLLARIO II.

In un triangolo qualunque la somma de' tre angoli uguaglia due retti, *etc.* (Si consulti Legendre. *Élémens de Géométrie*).

FINE.